

المحاضرة الخامسة: الرابعة

(1)

مثال:

أوجد حل المعادلة $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2xy u_{xy} = 0$ في المنطقة $xy > 0$ وتحقق الشروط التالية:

$$u|_{x=1} = y, \quad u_x|_{x=1} = y \quad (2)$$

الحل:

$$A = x^2, \quad 2B = 0, \quad C = -y^2$$

$$B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$$

المعادلة من النمط الزائدي.

المعادلة المميزة:

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0$$

$$(x dy - y dx)(x dy + y dx) = 0$$

$$\text{L1: } x dy + y dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln C_1$$

$$\ln(xy) = \ln C_1 \Rightarrow$$

$$xy = C_1$$

$$\text{L2: } x dy - y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln y - \ln x = \ln C_2 \Rightarrow$$

$$\ln \left| \frac{y}{x} \right| = \ln C_2 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_2$$

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$u_\xi \eta + \frac{1}{2\eta} u_\eta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[u\eta + \frac{1}{2\eta} u \right] = 0$$

ببينة η والمعاملة بالنسبة η نجد :

$$u\eta + \frac{1}{2\eta} u = \psi_1(\eta)$$

ببينة η نضرب في معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى
 الناتج المطلوب هو u والمختار المستقل هو η لمعامل التكامل هو :

$$\mu(\eta) = e^{\int \frac{1}{2\eta} d\eta} = e^{\frac{1}{2} \ln \eta} = \eta^{\frac{1}{2}}$$

$$[\eta^{\frac{1}{2}} u]' = \psi_1(\eta) \cdot \eta^{\frac{1}{2}}$$

المعاملة بالنسبة η :

$$\eta^{\frac{1}{2}} u = \int \psi_1(\eta) \eta^{\frac{1}{2}} d\eta + \varphi(\eta)$$

$$\eta^{\frac{1}{2}} u = \varphi(\eta) + \psi(\eta)$$

والتالي نضرب في الحد العام :

$$u = \eta^{-\frac{1}{2}} [\varphi(\eta) + \psi(\eta)]$$

العودة للمتغيرات القديمة :

$$u(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\varphi(y \cdot x) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) \right] \quad (4)$$

لإيجاد الحد الخاص :

$$u_{in} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-y}{x^2} \right) [\varphi(y \cdot x) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)] +$$

$$+ \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[y \cdot \varphi'(xy) - \frac{y}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} (\varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \left[\varphi'(xy) - \frac{1}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right) \right] \quad (4')$$

صفحة (2) و (4) و (4) نجد

$$(2), (4) \Rightarrow y = y^{\frac{1}{2}} [\varphi(y) + \psi(y)] \Rightarrow$$

$$\varphi(y) + \psi(y) = y^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} (\varphi(y) + \psi(y)) + y^{\frac{1}{2}} [\varphi'(y) - \psi'(y)]$$

$$y = \frac{1}{2} y + y^{\frac{1}{2}} [\varphi'(y) - \psi'(y)] \Rightarrow$$

$$y^{\frac{1}{2}} [\varphi'(y) - \psi'(y)] = \frac{1}{2} y$$

$$\varphi'(y) - \psi'(y) = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

ننقل العلاقة (5) بالنسبة إلى ψ على

$$\varphi'(y) + \psi'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \quad (5')$$

$$2\varphi'(y) = 2y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \psi'(y) = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(y) = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \quad (7)$$

نبدل (7) في (5) فنحصل على

$$\psi(y) = y^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

نبدل في العلاقة (7) كل y بـ xy فنحصل على

$$\varphi(xy) = \frac{2}{3} (xy)^{\frac{3}{2}}$$

نبدل في العلاقة (8) كل y بـ $\frac{y}{x}$ نجد

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

نصل في (١) إلى ما يلي وبما في عبارة الحل العام

منه في عبارة الحل الخاص المطلوبة:

$$u(x, y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$u(x, y) = \frac{2}{3} x^2 y + \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{x}$$

وهو الحل الخاص:

مثال (وجد حل المعادلة)

$$u_x + t u_x + x u_t + x t u = 0 \quad (1)$$

والمعطى للشرط الابتدائية الآتية:

$$u|_{t=3x} = 0, \quad u_t|_{t=3x} = e^{-5x^2} \quad (2)$$

هذه المعادلة من النمط الزائدي لأنها لا تحتوي على الحد u (وهي في الشكل النموذجي)

المعادلة (١) تكتب على الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_x + x u] + t [u_x + x u] = 0$$

نفرض $u_x + x u = z$

$$z_t + t z = 0$$

نثبت x والمكاملة بالنسبة t نجد:

$$\frac{dz}{z} = -t dt$$

$$\ln z = -\frac{1}{2} t^2$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \varphi(x)$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$u(x) = e^{\int p(x) dx}$$

$$\Rightarrow v = \varphi_1(x) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

نبدل u بـ v ليصبح:

$$u_x + x \cdot u = \varphi_1(x) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

نثبت x فنحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

باعتبار u متغيراً

$$u(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل $e^{\frac{1}{2}x^2}$ فنحصل على معادلة

تامة الشكل:

$$[e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot u]' = \varphi_1(x) e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot u = e^{-\frac{1}{2}t^2} \int \varphi_1(x) e^{\frac{1}{2}x^2} dx + \psi(t)$$

$$u(x, t) = e^{-\frac{1}{2}(x^2 + t^2)} \varphi(x) + \psi(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (3)$$

علماً أن φ دالة ثابتة لـ x فقط و ψ ثابتة لـ t فقط.

نتفحص العلاقة (3) بالنسبة لـ t :

$$u_t = -t \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 + t^2)} \varphi(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi'(t) \quad (3')$$

من (1) و (3) و (3'):

$$0 = e^{-5x^2} \varphi(3x) + \psi(3x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (4)$$

$$e^{-5x^2} = -(3x) e^{-5x^2} \cdot \varphi(3x) + e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi'(3x)$$

بإستفادة من العلاقة (4) العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$e^{-5x^2} = \varphi(3x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi(3x) + e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi'(3x)$$

$$\psi'(3x) + (3x) \psi(3x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}(3x)^2}$$

وبالتالي حصلنا على معادلة تفاضلية خطية متجانسة تابعة لمحول هو $3x$ والتابع لمحول مستقل هو $(3x)$.

نقرب $3x = X \Rightarrow \psi'(X) + X \psi(X) = e^{-\frac{1}{2}X^2}$
وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة لمحول هو $\psi(X)$ والمحول هو X نوجد عامل التكامل:

$$\mu(X) = e^{\int X dx} = e^{\frac{1}{2}X^2}$$

نضرب الطرفين بالمعادلة بعامل التكامل فنحصل بالمعادلة تامة،
 $[e^{\frac{1}{2}X^2} \psi(X)]' = 1 \Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{2}X^2} \psi(X) = X \Rightarrow$$

$$\psi(3x) = 3x e^{-\frac{1}{2}(3x)^2} \quad \dots (5)$$

نبدل (5) في (4) فنحصل على:

$$0 = e^{-5x^2} \varphi(x) + 3x e^{-\frac{1}{2}(3x)^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$0 = e^{-5x^2} \varphi(x) + 3x e^{-5x^2}$$

$$\varphi(x) = -3x \quad \dots (6)$$

نبدل في العلاقة (5) كل $3x$ بـ t فنحصل على:

$$\psi(t) = t e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (7)$$

ثم نبدل (6) و (7) في عبارة الحل العام (3) فنحصل على الحل الخاص

$$u(x, t) = -3x e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)} + t e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)}$$

$$u(x, t) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+t^2)} [t - 3x]$$

وهو الحل الخاص المطلوب.

طريقة الموجات المنتشرة: استنبط علاقة دالامبير

معادلة الذبذبات المقابلية لعلاقة دالامبير ^{تقريباً}

ووجد أنه معادلة الذبذبات المقابلية لوتر كائناً في
والتي تأخذ الشكل التالي

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (1)$$

والمحقق الشروط الابتدائية:

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

الحل: المعادلة المعطاة من النمط الزائدي:

$$A = -a^2, \quad 2B = 0, \quad C = 1$$

$$B^2 - AC = 0 + a^2 = a^2 > 0$$

المعادلة من النمط الزائدي والمعادلة المميزة:

$$A dt^2 - 2B dx dt + C dx^2 = 0$$

$$-a^2 dt^2 + dx^2 = 0$$

$$(dx + a dt)(dx - a dt) = 0$$

$$L_1: dx + a dt = 0 \Rightarrow x + at = C_1$$

$$L_2: dx - a dt = 0 \Rightarrow x - at = C_2$$

$$\begin{cases} \xi = x + at, & \eta = x - at \end{cases} \quad (3)$$

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = a, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = -a$$

$$\xi_{xx} = 0, \quad \xi_{xt} = a, \quad \xi_{tt} = 0$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 = 0$$

$$U_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 = 0$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi} \cdot t^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot t + u_{\eta\eta} \cdot t^2 + 0$$

$$u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}$$

نفرض في المعادلة:

$$a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} - a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} - a^2 u_{\eta\eta} = 0$$

$$-4a^2 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [u_{\eta}] = 0$$

ثبتت والمكاملة بالنسبة لـ ξ نجد:

$$u_{\eta} = g(\eta)$$

ثبتت والمكاملة بالنسبة لـ η نجد:

$$u(\xi, \eta) = \int g(\eta) d\eta + f(\xi)$$

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$[u(x, t)] = f(x+at) + g(x-at) \quad (4)$$

$$u_t = a \cdot f'(x+at) - a g'(x-at) \quad (4')$$

من (4) و (4') نجد:

$$q(x) = f(x) + g(x) \quad (5)$$

$$p(x) = a f'(x) - a g'(x)$$

$$\frac{1}{a} u(x) = f'(x) - g'(x) \quad (6)$$

$$q'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (5')$$

مجموع (6) مع (5) نحصل:

$$\frac{1}{a} \psi(x) + \varphi'(x) = 2\psi'(x) \Rightarrow$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \varphi'(x) + \frac{1}{2a} \psi(x) \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^a \psi(x) dx \quad (2)$$

منه نفي كل

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^a \psi(x) dx$$

$$\varphi(x+a) = \frac{1}{2} \varphi(x+a) + \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \psi(x) dx$$

$$\psi(x-a) = \frac{1}{2} \varphi(x-a) - \frac{1}{2a} \int_0^{x+a} \psi(x) dx$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+a) + \varphi(x-a)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+a} \psi(y) dy + \right.$$

$$\left. + \int_{x-a}^0 \psi(x) dx \right] \quad x+a$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+a) + \varphi(x-a)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \psi(x) dx$$

مسافة دالامير

مسافة

يمكن التعبير عن الحل (علاقة دالامير) في صورة

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

المجموع

على أن الخراف الابتدائية

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+a) + \varphi(x-a)]$$

والسرعة الابتدائية هو:

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

معادلة الذبذبات الغير متجانسة:

أوجد حل معادلة الذبذبات غير المتجانسة:

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$$

والمحققة للشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \quad \left. \begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{array} \right\}; -\infty < x < +\infty$$

$$w_F(x,t,\tau)$$

الحل: نفرض ذلك:

هذا ما ألكوشي المساعدة.

$$\frac{1}{a^2} (w_F)_{tt} = (w_F)_{xx}; \quad t > \tau, -\infty < x < +\infty \quad (3)$$

$$w_F(x,\tau,\tau) = 0$$

$$\frac{\partial w_F(x,\tau,\tau)}{\partial \tau} = f(x,\tau)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_F(x,\tau,\tau) = 0 \\ \frac{\partial w_F(x,\tau,\tau)}{\partial \tau} = f(x,\tau) \end{array} \right\} t \geq \tau, -\infty < x < +\infty \quad (4)$$

وتعطى العلاقة بالأمير:

$$w_F(x,t,\tau) = w_F(x,t-\tau,\tau)$$

$$w_F = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy, f(x, \beta(x)) \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial t} dy \right]$$

التاريخ:

الموضوع:

حل هذه المسألة واحدة ببطء من علاقة والأمير
وهذه ومن جهة أخرى نكتب علاقة والأمير بالصورة
الآتية:

$$u(x,t) = \frac{\partial W_F(x,t,0)}{\partial \tau} + W_F(x,t,0) \quad (6)$$

علاوة على ذلك:

$$W_F = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

$$\text{و: } W_F(x,t,0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

(3,1,1) هي علاقة المسألة المتجانسة (كوشي) عندما $\tau = 0$
و $f = \psi(x)$ و $F = \varphi(x)$ على الترتيب في عملية
التفاضل بما شدة توضع ذلك:

$$\frac{\partial W_F}{\partial t} = \frac{1}{2a} \left[\varphi(x+at)(a) - \varphi(x-at)(-a) + \int_{x-at}^{x+at} 0 d\xi \right] = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}$$

والآن سوف نثبت أن حل المعادلة غير المتجانسة
بالسرور الابتدائية الصغرى:

$$u_F(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$$

بما هي الصورة:

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_F(x, t, \tau) d\tau \quad (7)$$

دالة أخرى وهو عند الحد الخاص للمعادلة غير المتجانسة

نصف العلاقة (7) بالنسبة لـ t :

$$u_t = a^2 w_F(x, t, t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_F(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau$$

والاغنياء $\frac{\partial}{\partial t}$ الشرط (4) عند $t=0$

$$u_t = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_F(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau$$

$$u_{tt} = a^2 \frac{\partial w_F(x, t, t)}{\partial t} + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_F(x, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau$$

$$u_{tt} = a^2 P(x, t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_F(x, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau$$

نصف (7) بالنسبة لـ x :

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_F(x, t, \tau)}{\partial x^2} d\tau$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_F}{\partial x^2} d\tau$$

الاعتماد على العلاقة (7) نكتبها

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w_F}{\partial x^2} d\tau$$

$$P(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w_F}{\partial x^2} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_F}{\partial x^2} d\tau + P(x, t)$$

وبالتالي فإن (7) تمثل حل خاص للمعادلة المتجانسة

وبالتالي نستنتج مما سبق أنه يمكن التعبير عن الحل

المطلوب (١١) (٢) مع الحل التالي:

$$u(x,t) = \frac{\partial u_0(x,t,0)}{\partial t} + u_0(x,t,0) + a^2 \int_0^{x+at} u_{xx}(x,t,\tau) d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{a^2}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

وهو حل لمعادلة الزبذبات غير المتجانسة

مثال ١ دوجد حل للمعادلة

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 4xt \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x$$

حيث أن u_{xx} ثابت واحد

حل هذه المعادلة يعطى بالشكل التالي:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{a^2}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$\phi(x) = x^2, \quad \psi(x) = x, \quad f(x,t) = xt, \quad a = 2$$

$$\frac{1}{2} [\phi(x+2t) - \phi(x-2t)] + \frac{1}{2} [\phi(x+2t) + \phi(x-2t)]$$

بذلك $x-2t$

$$= \frac{1}{2} [(x+2t)^2 + (x-2t)^2]$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 + 4xt + 4t^2 + x^2 - 4xt + 4t^2]$$

$$= x^2 + 4t^2$$

التاريخ: / /

الموضوع:

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-2t}^{x+2t} \xi d\xi = \frac{1}{2} \xi^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t}$$

$$= \frac{1}{2} [(x+2t)^2 - (x-2t)^2] = \frac{1}{2} [8xt] = xt$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \cdot d\tau = \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \xi \cdot \tau \cdot d\xi \cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \tau \left[\xi^2 \right]_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \tau [(x+2(t-\tau))^2 - (x-2(t-\tau))^2] d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t 2[8x(t-\tau)] d\tau = 4x \int_0^t [t-\tau] d\tau$$

$$= 4x \left[\frac{1}{2} t \cdot \tau - \frac{1}{3} \tau^3 \right]_0^t = 4x \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right)$$

$$= 4x \left[\frac{1}{2} t \cdot \tau^2 \right]_0^t = 4x \left(\frac{1}{2} t^3 - \frac{1}{3} t^3 \right) = 4x \left(\frac{1}{6} t^3 \right)$$

$$= \frac{2}{3} xt^3$$

$$u(x,t) = x^2 + 4t^2 + xt + \frac{2}{3} xt^3$$

وهو حل المعادلة المطلوبة